comandes estan implementades en l'idioma en què s'estigui treballant: un `if` d'un petit programa en *WIRIS* en anglès es convertirà en `si` en una implementació de *WIRIS* en català o castellà. Però la documentació és abundant i és fàcil trobar *helps* que t'ajuden a fer-lo anar. Tot comptat, *WIRIS* és una eina útil que permet fer càlculs complicats de manera ràpida des de qualsevol navegador.

En un altre àmbit, i amb vocació més enciclopèdica que de programa de càlcul, trobem Wolfram|Alpha, a l'adreça `www.wolframalpha.com`. El seu creador, Stephen Wolfram, és el pare del Mathematica, físic, matemàtic i informàtic teòric de Caltech, Princeton i la Universitat d'Illinois. Quan entrem a Wolfram|Alpha trobem una senzilla pantalla minimalista, que recorda en certa manera Google, on podem entrar allò que vulguem buscar o calcular. Per exemple, si hi entreu un polinomi igual a zero, us en dibuixarà la gràfica i trobarà els seus zeros. Podeu entrar (fila a fila) una matriu quadrada i us donarà els seus valors i vectors propis directament, envoltats de molta més informació rellevant sobre la matriu (per exemple, si és simètrica).

Però Wolfram|Alpha no és només un web de càlcul matemàtic simbòlic, sinó que té aspiracions d'enciclopèdia global. Si Google recull les pàgines d'internet i les ordena per rellevància, Wolfram|Alpha compila informació de tots els àmbits, l'emmagatzema i la serveix sota demanda simplement entrant des del navegador i posant la paraula (o pregunta, o cerca) al quadre inicial. A sota d'aquest quadre hi ha un enllaç anomenat *Examples*, on si hi aneu podreu trobar una exhaustiva (i llarga!) llista de coses que Wolfram|Alpha pot fer. Des de càlculs matemàtics i estadístics, fins a búsquedes de seqüències d'ADN, passant per pàgines de valors en borsa o dades mèdiques. Tot hi té cabuda dins de Wolfram|Alpha.

Wolfram|Alpha es defineix com un *computational knowledge engine*, és a dir, una enciclopèdia *online* de coneixement i de computació. L'avantatge sobre altres enciclopèdies com la ubiqua Wikipedia és la possibilitat de dur-hi a terme càlculs a dins, més enllà de la simple compilació de dades. Wolfram|Alpha pot ser un model per als futurs webs de coneixement integrat, a més d'una eina excel·lent per ajudar-vos a diagonalitzar una matriu o fer una integral complicada.

Pep Burillo
Universitat Politècnica de Catalunya

Problemes

Tot just arrivaba a les mans dels nostres lectors el darrer número de la *SCM/Notícies* que aquest redactor rebia un missatge del professor Juan-Bosco Romero Márquez, des d'Àvila, oferint-se per col·laborar en aquesta secció. Qui conegui una mica aquest món dels problemistes, de les revistes com *Crux Mathematicorum*, la *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, les seccions de problemes de la *Gaceta de la RSME*, de *The American Mathematical Monthly* , de *Mathematics Magazine* i d'altres ja sabrà de la gran quantitat de treballs i col·laboracions de l'il·lustre professor. Desgraciadament i imprevisible, la mort se l'emportà el 19 de gener d'enguany, quan tot just ens havia fet arribar uns primers materials. En sentit homenatge i agraïment, el primer problema que publiquem, l'**A117**, és de la seva autoria; descansi en pau!

Naturalment, també agraïm a José Luis Díaz-Barrero (UPC, Barcelona), a Joaquim Nadal i Vidal (INS de Cassà de la Selva) i a Enric Ventura i Capell (UPC, Manresa) els enunciats dels problemes **A118**, **A119** i **A120**.

Ara cal mostrar la nostra gratitud per la feina de Xavier Ros (UPC, Barcelona) que envia solucions dels problemes **A105**, **A112**, **A113** i **A116**, de Joaquim Nadal i Vidal per la solució del problema **A112** i de Miquel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca) per la del problema **A116**. Resten així pendents els problemes **A110** (*SCM/Notícies* 32), **A114** i **A115** (*SCM/Notícies* 33); animeu-vos!

Finalment, us torno a dir que si els vostres treballs estan en format TEX o LaTEX, ens fareu la feina molt més fàcil, però totes les aportacions en qualsevol altre format (manuscrits inclosos!), seran igualment ben rebudes. L'adreça de correu és la de sempre: `carles.romero.c@gmail.com`. Fins la propera!

Problemes proposats

A117. (Proposat per Juan-Bosco Romero Márquez †, Àvila)

Sigui $\triangle ABC$ un triangle rectangle en A amb costats $a > b \geq c$. Siguin $h_a = AH_a$ i $v_a = AV_a$ l'altura i la bisectriu corresponents a l'angle A, amb peus respectius a H_a i V_a sobre el costat BC. Siguin $n_a = BH_a$, $m_a = H_aC$, $n'_a = BV_a$ i $m'_a = V_aC$, amb $m_a + n_a = m'_a + n'_a = a$.

Demostreu que

$$a^2\sqrt{h_a v_a} \geq b^2\sqrt{n_a n'_a} + c^2\sqrt{m_a m'_a}$$

amb igualtat si, i només si, $b = c$.

A118. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona)

Siguin a b i c tres nombres reals i positius. Demostreu que

$$(a+b+c)\left(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\right)$$
$$\geq \sqrt{abc} + \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)$$

A119. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.)

Per cada vèrtex d'un triangle $\triangle ABC$ d'àrea S, tracem la perpendicular a la bisectriu que passa per aquest vèrtex, formant així un nou triangle $\triangle A'B'C'$ d'àrea S'. Trobeu S/S'.

A120. (Proposat per Enric Ventura i Capell, UPC, Manresa.)

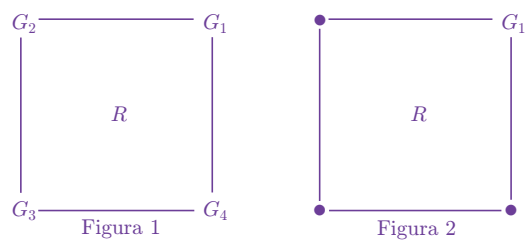


Figura 1 Figura 2

Tenim un recinte quadrat com el de la figura 1, amb quatre gats situats a les cantonades, G_1, G_2, G_3 i G_4, i un ratolí al centre, R. El ratolí es pot moure lliurement per tot el pla a una velocitat màxima V_r, mentre que els gats només poden córrer per les quatre arestes del quadrat i a una velocitat màxima de V_g. El ratolí salvarà la vida si aconsegueix sortir fora del quadrat sense que dos gats el toquin simultàniament. Si diem $\alpha = V_g/V_r \geq 0$ a la relació entre velocitats màximes, trobeu el valor crític $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ que fa que el ratolí es pugui escapar si, i només si, $\alpha < \alpha_0$.

Ara tenim el ratolí al punt R i només un gat al punt G_1 (figura 2); i també es tracta que el ratolí s'escapi fora del quadrat sense ser caçat pel gat (en aquest cas només un). Demostreu que si $\alpha < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ el ratolí té una estratègia per escapar.

Solucions

A105. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona)

Siguin a, b, c i d quatre nombres reals i positius que compleixen que $abcd = 1$. Demostreu que

$$\frac{a^9+b^7}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b^9+c^7}{c^2+d^2+a^2} +$$
$$+ \frac{c^9+d^7}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d^9+a^7}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{8}{3}.$$

Solució: (Solució de Xavier Ros, UPC, Barcelona)

Recordem la *desigualtat de* **Cauchy** (la usarem en dimensió 4), que ens diu que, per a nombres reals qualssevol x, y, w, z i p, q, r, s, s'esdevé que

$$(px+qy+rw+sz)^2 \leq$$
$$\leq \left(x^2+y^2+w^2+z^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right).$$

Posem

$$p = \frac{b^{7/2}}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}, \quad q = \frac{c^{7/2}}{\sqrt{c^2+d^2+a^2}},$$
$$r = \frac{d^{7/2}}{\sqrt{a^2+b^2+d^2}}, \quad s = \frac{a^{7/2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

i

$$x = \sqrt{b^2+c^2+d^2}, \quad y = \sqrt{c^2+d^2+a^2},$$
$$w = \sqrt{a^2+b^2+d^2}, \quad z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Obtenim

$$\left(a^{7/2}+b^{7/2}+c^{7/2}+d^{7/2}\right)^2 \leq$$
$$\leq \left(\sum_{cyc} \frac{b^7}{b^2+c^2+d^2}\right) 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

on $\sum_{cyc}$ vol dir que la suma és cíclica.

Ara, quan fem servir la desigualtat entre les mitjanes, tenim que

$$\frac{1}{8}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{7/2} \leq$$
$$\leq \left(a^{7/2}+b^{7/2}+c^{7/2}+d^{7/2}\right)^2$$

i per tant hem demostrat que

$$\frac{1}{24}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{5/2} \leq \sum_{cyc} \frac{b^7}{b^2+c^2+d^2}$$

Tornem a usar la desigualtat de les mitjanes un altre cop:

$$\frac{4}{3}(abcd)^{5/4} \leq \frac{1}{24}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^{5/2}$$

i, per tant,

$$\frac{4}{3}(abcd)^{5/4} \leq \sum_{cyc} \frac{b^7}{b^2+c^2+d^2}$$

De la mateixa manera, amb el mateix argument però posant aquest cop

$$p = \frac{a^{9/2}}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}, \quad \text{etc.}$$

obtenim

$$\frac{4}{3}(abcd)^{7/2} \leq \sum_{cyc} \frac{a^9}{b^2+c^2+d^2}.$$

Per tant,

$$\frac{4}{3}(abcd)^{7/2} + \frac{4}{3}(abcd)^{5/2} \leq \sum_{cyc} \frac{a^9+b^7}{b^2+c^2+d^2}$$

i, com que $abcd = 1$, la demostració queda completa.

A112. (Proposat per la redacció.)

Trobeu les solucions reals de l'equació

$$x^2+2ax+a+\frac{1}{16} = \sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$$

per a $0 < a < 1/4$.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.)

Reescrivim l'equació:

$$\left(x^2+2ax+a^2\right) + \left(a+\frac{1}{16}-a^2\right) =$$
$$= \sqrt{(x+a) - \left(a+\frac{1}{16}-a^2\right)}$$

fem $x+a = z$ i $a+\frac{1}{16}-a^2 = T$ i així tindrem l'equació irracional

$$z^2+T = \sqrt{z-T}$$

la qual, en elevar al quadrat i passar tot a un costat, es transforma en

$$z^4+2Tz^2-z+\left(T^2+T\right) = 0.$$

Ara intentarem descompondre aquest polinomi de quart grau en dos de segon grau. Una possibilitat òbvia és que els termes independents d'aquests nous polinomis siguin T i $T+1$. Seria això:

$$z^4+2Tz^2-z+\left(T^2+T\right) =$$
$$= \left(z^2+Az+T\right)\left(z^2+Bz+T+1\right)$$

que, per igualació de coeficients del mateix grau, porta al sistema

$$\begin{cases} B+A=0 \\ T+1+AB+T=2T \\ A(T+1)+BT=-1 \end{cases}$$

amb solució $A=-1$ i $B=1$. L'equació a resoldre és, doncs,

$$\left(z^2-z+T\right)\left(z^2+z+T+1\right) = 0.$$

Per a z^2-z+T les arrels són

$$z = x+a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4T}}{2}$$

i, per a $z^2+z+T+1$ les arrels són

$$z = x + a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(T+1)}}{2}$$

o sigui

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4T}}{2} - a \qquad (*)$$

i

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(T+1)}}{2} - a \qquad (**)$$

Vegem com són els resultats obtinguts fins ara: la funció $f(a) = a - a^2$ a l'interval $(0, 1/4)$ és estrictament creixent i, per tant,

$$\begin{aligned} 0 &< 4\left(0^+ - \left(0^+\right)^2\right) \\ &< 4\left(a - a^2\right) < 4\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Obtenim:

$$\begin{aligned} 1 - 4T &= 1 - 4\left(a + \frac{1}{16} - a^2\right) \\ &= \frac{3}{4} - 4\left(a - a^2\right) > \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

i les dues arrels de $(*)$ són reals.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} 1 - 4(T+1) &= 1 - 4\left(a + \frac{1}{16} - a^2 + 1\right) \\ &= -\frac{13}{4} - 4\left(a - a^2\right) \\ &< -\frac{13}{4} - 0 < -\frac{13}{4} < 0 \end{aligned}$$

i les dues arrels de $(**)$ són complexes.

Ara ja només cal considerar les solucions obtingudes a $(*)$ de les quals només ens queda el tràmit de la seva validació per a l'equació irracional del començament. Les z vàlides seran les que facin $z - T > 0$. De

$$0 < 4\left(a - a^2\right) < \frac{3}{4}$$

obtenim

$$\begin{aligned} 0 < 2\left(a - a^2\right) < \frac{3}{8} < \frac{7}{8} < \frac{7}{8} + \sqrt{1-4T} &= \\ = \frac{7}{8} + \sqrt{1 - 4\left(a + \frac{1}{16} - a^2\right)} \end{aligned}$$

o sigui,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 4\left(a + \frac{1}{16} - a^2\right)} &> 2\left(a - a^2\right) - \frac{7}{8} \\ &= 2\left(a + \frac{1}{16} - a^2\right) - 1 \end{aligned}$$

cosa que prova que

$$\sqrt{1-4T} > 2T - 1.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1 + \sqrt{1-4T} - 2T}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1-4T}}{2} - T = z - T \end{aligned}$$

i la solució

$$x = \frac{1 + \sqrt{1-4T}}{2} - a$$

és admissible. Finalment, de $4T^2 > 0$, que equival a $1 - 4T + 4T^2 > 1 - 4T$ i de

$$\begin{aligned} 1 - 2T &= 1 - 2\left(a + \frac{1}{16} - a^2\right) \\ &= \frac{7}{8} - 2\left(a - a^2\right) > \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} > 0 \end{aligned}$$

obtenim

$$(1-2T)^2 = 1 - 4T + 4T^2 > 1 - 4T$$

o sigui

$$1 - 2T > \sqrt{1-4T}$$

que dóna

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1 - \sqrt{1-4T} - 2T}{2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1-4T}}{2} - T = z - T \end{aligned}$$

i la solució

$$x = \frac{1 - \sqrt{1-4T}}{2} - a$$

també és admissible. En definitiva, les dues solucions reals obtingudes a $(*)$ són vàlides i les solucions demanades són

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4T}}{2} - a\,, \quad \text{amb} \quad T = a + \frac{1}{16} - a^2.$$

A113. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona)

Sigui x un nombre real i positiu. Demostreu que

$$\left(\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)^{2/3}+\left(\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)^{2/3}>\frac{3\sqrt[3]{2}-2}{2}$$

on $[x]$ i $\{x\}$ representen, respectivament, les parts entera i fraccionària del nombre x.

Solució: (Solució de Xavier Ros, UPC, Barcelona.)

Per començar, demostrarem que

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^{2/3}+\left(\frac{b}{2a+b}\right)^{2/3}\geq\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\qquad(*)$$

amb igualtat si i només si $a=b$. Si posem $a=\{x\}$ i $b=[x]$ obtindrem la desigualtat

$$\left(\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)^{2/3}+\left(\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)^{2/3}>\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

que millora la desigualtat proposada a l'enunciat, ja que

$$\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}>\frac{3\sqrt[3]{2}-2}{2}.$$

De fet, la constant que obtenim és l'òptima, ja que quan x tendeix a 2^- tindrem que $[x]=1$ i $\{x\}$ tendeix a 1.

Per demostrar $(*)$, com que la desigualtat és homogènia (en el sentit que si multipliquem a i b per qualsevol nombre, la desigualtat que obtenim és la mateixa), podem suposar que $a+b=1$ i, aleshores, la desigualtat que hem de demostrar és

$$\left(\frac{a}{2-a}\right)^{2/3}+\left(\frac{b}{2-b}\right)^{2/3}\geq\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}.$$

Considerem la funció

$$f(t)=\left(\frac{t}{2-t}\right)^{2/3}.$$

Si aquesta funció fos convexa, aleshores ja hauríem acabat, perquè la *desigualtat de* **Jensen** ens donaria que

$$f(a)+f(b)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

que és exactament el que volem demostrar. Ara bé, un simple càlcul ens permet comprovar que la funció f és convexa per $t\geq\frac{1}{3}$, però no en $\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Considerem doncs la funció

$$g(t)=f\left(\frac{1}{2}+t\right)+f\left(\frac{1}{2}-t\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Si mostrem que g és una funció positiva per a $t\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ aleshores haurem acabat. De fet, com que g és una funció parella, podem limitar l'estudi a que $0<t\leq\frac{1}{2}$.

En primer lloc, observem que, com que f és convexa en $\left(\frac{1}{3},1\right)$, aleshores g és positiva per a $t\in\left[0,\frac{1}{6}\right]$ (*desigualtat de* **Jensen**). Com que $g(0)=0$, aleshores g té un mínim local en $t=0$. Ara bé, si calculem els zeros de la derivada de g (amb, per exemple, Derive, Maple o Mathematica), obtenim

$$g'(t)=0,\ t>0\implies t=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{7}\left(4\sqrt{2}-5\right)}$$

i, en particular, veiem que la derivada de g només s'anul·la en $t=0$ i en aquest altre punt. Ara bé, com que en $t=0$ hi ha un mínim local, aquest altre punt de derivada zero no pot ser un mínim local i, per tant, g no té cap mínim local a l'interior de l'interval $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. En particular, el mínim absolut de la funció g en l'interval $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ o bé està en el punt $t=0$ o bé en el punt $t=\frac{1}{2}$. Un petit càlcul ens permet comprovar que

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)+f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}>0$$

i per tant $g(t)\geq g(0)=0$ per tot $t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, tal com volíem demostrar.

A116. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.)

D'un cert triangle $\triangle ABC$ en retallem les tres cantonades amb rectes paral·leles als respectius costats oposats, i obtenim un hexàgon amb els costats dos a dos paral·lels.

a) Mostreu que es possible fer això de manera que de l'hexàgon resultant tingui els sis costats iguals (encara que no pas els sis angles!) i trobeu la mida d'aquests sis costats iguals en funció dels costats del triangle $\triangle ABC$.

b) Trobeu la relació entre l'àrea d'hexàgon i l'àrea del triangle.

c) Si considerem tots els triangles d'àrea 1 i els sotmetem a aquest procés de retallades, quina àrea tindrà l'hexàgon més gran dels que obtindrem?

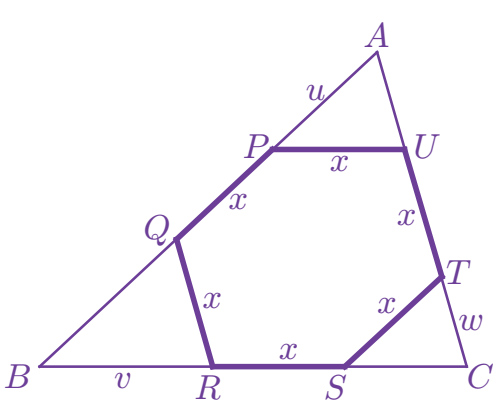
Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

a) Sigui $PQRSTU$ un dels hexàgons obtinguts en el procés de retallades indicat, amb $P, Q \in AB$, $R, S \in BC$ i $T, U \in CA$. Del *teorema de* **Thales** resulta

$$\frac{AU}{AP} = \frac{UC}{PB} = \frac{AC}{AB}$$
$$\frac{BQ}{BR} = \frac{QA}{RC} = \frac{BA}{BC} \qquad \text{i} \qquad (1)$$
$$\frac{CS}{CT} = \frac{SB}{TA} = \frac{CB}{CA}$$

Posem $AP = u$, $BR = v$ i $CT = w$. Si volem que l'hexàgon considerat abans tengui els sis costats iguals i denotam x la mida d'aquests costats iguals, serà

$$AU = b - w - x\,,\ UC = w + x\,,\ PB = c - u\,,$$
$$BQ = c - u - x\,,\ QA = u + x\,,\ RC = a - v\,,$$
$$CS = a - v - x\,,\ SB = v + x\,,\ TA = b - w\,,$$



En introduir aquestes expressions a (1) obtenim

$$\frac{b-w-x}{u} = \frac{w+x}{c-u} = \frac{b}{c}$$
$$\frac{c-u-x}{v} = \frac{u+x}{a-v} = \frac{c}{a}$$
$$\frac{a-v-x}{w} = \frac{v+x}{b-w} = \frac{a}{b}$$

expressions que són respectivament equivalents a

$$\begin{aligned} cw + cx &= bc - bu\,, \\ au + ax &= ca - cv\,, \\ bv + bx &= ab - aw \end{aligned} \qquad (2)$$

i, atès que els triangles $\triangle APU$, $\triangle BRQ$ i $\triangle CTS$ són semblants al triangle $\triangle ABC$, també tenim que

$$\frac{w}{x} = \frac{b}{c}\,, \quad \frac{u}{x} = \frac{c}{a}\,, \quad \text{i} \quad \frac{v}{x} = \frac{a}{b}$$

d'on

$$x = \frac{cw}{b} = \frac{au}{c} = \frac{bv}{a}\,. \qquad (3)$$

Les equacions (2) i (3) són equivalents al sistema

$$\begin{cases} cw + c \cdot \dfrac{cw}{b} = bc - bu \\ au + a \cdot \dfrac{au}{c} = ca - cv \\ bv + b \cdot \dfrac{bv}{a} = ab - aw \\ x = \dfrac{au}{c} \end{cases}$$

o sigui

$$\begin{cases} cx - au = 0 \\ a\,(c+a)\,u + c^2 v = c^2 a \\ b\,(a+b)\,v + a^2 w = a^2 b \\ b^2 u + c\,(b+c)\,w = b^2 c \end{cases}$$

la compatibilitat del qual (el valor del determinant de la matriu dels coeficients és igual a $abc^2(a+b+c)(ab+bc+ca)$ i, per tant, és no nul) determina la possibilitat que l'hexàgon $PQRSTU$ resultant tengui els sis costats iguals.

La *regla de* **Cramer** dóna immediatament

$$x = \frac{abc}{ab + bc + ca}$$

b) Si amb la notació $[X_1 X_2 \ldots X_n]$ indicam l'àrea del polígon $X_1 X_2 \ldots X_n$, tenim

$$\frac{[PQRSTU]}{[ABC]} =$$

$$= 1 - \left(\frac{[APU]+[BRQ]+[CTS]}{[ABC]}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{[APU]}{[ABC]} + \frac{[BRQ]}{[ABC]} + \frac{[CTS]}{[ABC]}\right)$$

$$= 1 - \left(\left(\frac{PU}{BC}\right)^2 + \left(\frac{QR}{CA}\right)^2 + \left(\frac{ST}{AB}\right)^2\right)$$

$$= 1 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$= \frac{2abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2}$$

que és la relació entre l'àrea de l'hexàgon i l'àrea del triangle.

c) Finalment, si suposam $[ABC] = 1$ i fem ús de la relació

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

que és equivalent a la desigualtat òbvia

$$(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0$$

resulta de (4) que

$$[PQRSTU] \leq \frac{2}{3}$$

i la igualtat es complirà si, i només si, $a = b = c$. Per tant, l'hexàgon més gran dels que obtindrem a l'apartat *c*) tindrà àrea $\frac{2}{3}$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Matemots

Es tracta de resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *Notícies/SCM*). Exemple: "Taula de nombres que porten dintre seu totes les estudiants de la facultat de matemàtiques"(6 lletres) La resposta és "matriu", ja que és una taula de nombres, però també un òrgan reproductor femení.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[3]

1. Sensació d'inferioritat de qui no entén els nombres imaginaris (7 lletres).
2. Exclous l'ús de coordenades al pla (9 lletres).
3. Tan succinta com l'equació d'una hipèrbola o una paràbola (8 lletres).
4. Joc que permet trobar una tangent horitzontal (menys de 5 lletres).
5. El pa que menjaven a can Lebesgue (8 lletres).
6. Poden ser topològiques, diferenciables, i fins i tot muntar un espectacle de cabaret (9 lletres).
7. Fanàtic partidari de la resolució d'equacions de segon, tercer i quart grau (7 lletres).
8. Esbós sobre la importància dels feixos en geometria algebraica (7 lletres).

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

[3] Respostes als matemots: 6. varietats 3. lacònica 1. complex 7. radical 2. descartes 5. integral 8. esquema 4. rol